281. Winkeltreu ト Bewegung.

穂刈四三二(北大)

Finsler ノ空間ニ於イテ中心 x^i ニ於ケルニツノ Vektor $v^i(x,p)$, $w^i(x,p)$ ノナス角 θ ハ基本 Tensor ヲ $g_{ij}(x,p)$ デ表ハセバ

$$(1)\qquad \cos\theta = \frac{g_{ij}v^i w^j}{\sqrt{g_{ij}v^i v^j}\sqrt{g_{ij}w^i w^j}}$$

デ定義サレル、Riemann ノ場合ニハ v^i, w^i 及ビ g_{ij}

ガ x^i ノミノ函数デアルカラ (1) ノ特別ノ場合デアル。

コノ (1) 式ニ於テ特ニ $v^i = p^i$, $w^i = p^i + dp^i$ トオケバ ausgezeichnetes Linienelement (a.L ト略記スル) p^i ト無限小ダケ変ジタ $p^i + dp^i$ トノ間ノ角ヲ夾ヘル、即チ dp^i ニツイテ三以上ノ高イ項ヲステ、ソノナス角ヲ $d\theta$ トオケバ

$$(2) \qquad d\theta^2 = \frac{1}{\mathcal{L}} \mathcal{L}_{ij}\, dp^i dp^j$$

ガ得ラレル。但シコヽニ

$$\mathcal{L}(x, p) = \sqrt{g_{ij}\, p^i p^j}$$

$$\mathcal{L}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p^i}, \quad \mathcal{L}_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial p^i \partial p^j}$$

デアル。

(2) ニヨッテ角ヲ定義シタモノハ所謂 "métrique angulare" トヨバレ、コレカラ有限ナ角ヲ求メルニハ或ル積分路ニ沿ッテ積分スレバヨイ。

注意スベキコトハ (1) カラ (2) ハ上ニ述ベタヤウニシテ求メラレルガ逆ニ (2) カラ (1) ハ一般ニハ積分スルコトニヨッテ得ラレナイ。従ッテ今無限小変換

$$(3) \qquad \bar{x}^i = x^i + \xi^i \delta t$$

ガ (1) ヲ invariant ニスルトキニ Wenkeltreu von erster Art, (2) ヲ invariant ニスルトキニ Wenkeltreu von zweiter Art ト呼ブコトニスレバ

(3) ガ Wenkeltreu von erster Art ヲ admit スレバ Wenkeltreu von zweiter Art ヲモ admit スル。

コトガワカル。

定理 1. (3) ガ Finsler ノ空間デ Wenkeltreu von zweiter Art ヲ admit スルタメニハ ξ^i ハ

(4) $$a_{ij} = \mathcal{L} h_{ij} - \mathcal{L}_{ij} h = 0$$

ヲ満足シナケレバナラナイ。但シコヽニ

$$h = \mathcal{L}_{,k}\xi^k + \mathcal{L}_k \xi^k_{,l} p^l$$

デ記号，ハ x ニツイテノ偏微分ヲ表ハスモノトス。

証明. p^i ハ Vektor デアルカラ (3) ノ Trf. ニ對シテ

$$\bar{p}^i = p^i + \xi^i_{,l} p^l \delta t.$$

次ニ p^i ガ無限小 dp^i ダケ変ジタトキニ $\bar{p}^i$ ガ $d\bar{p}^i$ ノ変化ヲ受ケタトスレバ

$$\bar{p}^i + d\bar{p}^i = p^i + dp^i + \xi^i_{,l}(p^l + dp^l)\delta t$$

コノ二ツノ式カラ

$$d\bar{p}^i = dp^i + \xi^i_{,l} dp^l \delta t$$

ヨツテ

$$d\bar{\theta}^2 = \frac{1}{\mathcal{L}} \bar{\mathcal{L}}_{ij} d\bar{p}^i d\bar{p}^j$$

$$= \frac{1}{\mathcal{L} + h\delta t}\left\{\mathcal{L}_{ij} + (\mathcal{L}_{ij,k}\xi^k + \mathcal{L}_{ijk}\xi^k_{,l} p^l)\delta t + \cdots\right\}$$

$$\times\{dp^i+\xi^i_{,l}\,dp^l\,\delta t\}\{dp^j+\xi^j_{,l}\,dp^l\,\delta t\}$$

$$=d\theta^2+\frac{1}{L^2}(-L_{ij}h+L\,h_{ij})\,dp^i dp^j\,\delta t+\cdots\cdots$$

即チ δt ノ二次以上ノ項ヲステヽ角ガ不変デアルタメニハ $L^2\neq 0$ デアルカラ

$$(L h_{ij}-L_{ij}h)\,dp^i dp^j=a_{ij}\,dp^i dp^j=0$$

デナケレバナラナイ、然ルニ a_{ij} ノ中ニハ dp ハ含マザルガ故ニコノ式ガ成立スルタメニハ

$$a_{(ij)}=0$$

然ルニ a_{ij} ハ i ト j トニツイテ對稱デアルカラ求メル條件ハ

$$a_{ij}=0$$

デアル。

定理2. (3)ガ Finsler ノ空間デ Wenkeltreu von erster Art ヲ admit スルタメニハ ξ^i ハ

$$(5)\quad 2g_{(\lambda\mu}a_{\nu)(\gamma}g_{\alpha\beta)}=a_{(\beta\gamma}g_{\alpha)(\nu}g_{\lambda\mu)}+a_{(\lambda\mu}g_{\nu)(\alpha}g_{\beta\gamma)}$$

ヲ満足シナケレバナラナイ。但シコヽニ

$$(6)\quad a_{ij}=g_{ij,k}\,\xi^k+g_{ijk}\,\xi^k_{,l}\,p^l+g_{kj}\,\xi^k_{,j}+g_{ki}\,\xi^k_{,i}$$

$$g_{\lambda\mu}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 L^2}{\partial p^\lambda\partial p^\mu}$$

デアル。

証明ハ前ノ定理ト全ク同様ノ方針デヤレルカラ省略スル。

然シ非常ニ大キナ式ニナルカラ間違ヒヤスイ。

前ニ述ベタコトカラ

定理3. Finsler ノ空間ニ於テハ (5) ガ成立スレバ (4) ハ必ズ成立スル、逆ハ必ズシモ眞デナイ。

コトガワカル、シカシ Riemann ノ場合ニハ一点 x^i ニ於ケル dx^i ト $dx^i+d(dx^i)$ トノナス角ヲ考フレバソレハ (2) デ與ヘラレル、タゞコノ場合ニハ

$$\mathcal{L}(x,dx)=\sqrt{g_{ij}(x)\,dx^i\,dx^j}$$

デ g_{ij} ハ x ノミニ abhängen シテヰル、従ッテ2ノ場合ニハ容易ニ次ノコトガ証明出来ル。

定理4. Riemann ノ空間ニ於テハ (5) ガ成立スレバ必ズ (4) ガ成立シ、逆モ亦成立スル。

私ハ本紙65号, NO. 253 デ Finsler ノ空間ニ於ケル運動方程式トシテ (3) ノミノモトデハ

$$(7)\qquad \xi_{i/j}+\xi_{j/i}+2C_{ijr}\,\xi^r_{/0}=0$$

ヲ求メタ。コノ條件ハ曲線ト弧ノ長サヲ不変ニスルコトカラ求メタモノデアル、即チ

$$\begin{aligned} d\bar{s}=\bar{\mathcal{L}}&=\mathcal{L}+h\,\delta t+\cdots\cdots \\ &=ds+h\,\delta t+\cdots\cdots \end{aligned}$$

即チコノ記号ニヨレバ (7) 式ハ

$$h=0$$

トモ書クコトガ出来ル。實際ニ定理7ノ中デ與ヘタ如クニ

$$h=\mathcal{L}_{,k}\,\xi^k+\mathcal{L}_k\,\xi^k_{;l}\,p^l$$

デアルカラ、コノ式ヲ p^i, p^j ニツイテ微分シ簡単ナ変形ヲ施セバ (7) 式ガ得ラレル。(6) 式カラモ (7) 式ガ求メラレル、即チ (7), $a_{ij}=0$, $h=0$ ハ何レモ曲線ノ弧ノ長サヲ不変ニスルタメノ條件式デアル。

從ッテ (4), (5) カラ次ノ結果ガ得ラレル。

定理 5. (3) ガ *Finsler* ノ空間ニ於テ曲線ノ長サヲ不変ニスレバ (3) ハ *Winkeltreu von* $\left\{\begin{matrix}\textit{erster}\\ \textit{zweiter}\end{matrix}\right\}$ *Art* ヲ admit スル、即チ (3) ハ *Bewegung* ヲ admit スル。コノ逆ハ成立セズ。

コノ逆ノ成立シナイコトハ次ノ例デワカル。

ξ^i ガ

$$(8) \quad h=\varphi(x)\mathcal{L}$$

ヲ満足スルモノトス、(コヽニ $\varphi(x)$ ハ x ノミノ與ヘラレタ函数デアル) 然ルトキハ

$$h_{ij}=\varphi(x)\mathcal{L}_{ij}$$

デアルカラ (4) ニ代入スレバ

$$a_{ij}=\mathcal{L}\varphi\mathcal{L}_{ij}-\mathcal{L}_{ij}\varphi\mathcal{L}\equiv 0$$

即チ角ヲ不変ニスル、一方ニ於テ (3) ガ曲線ノ長サヲ不変ニスルタメニハ前ニ述ベタヤウニ $h=0$ デナケレバナラナイ、故ニ (8) ノ條件ノモトデハ $\varphi(x)\equiv 0$ デナイ限リ長サハ変化スル。

(18/XI, 1935)